Aufgabe 13: Beschreibungsfunktion

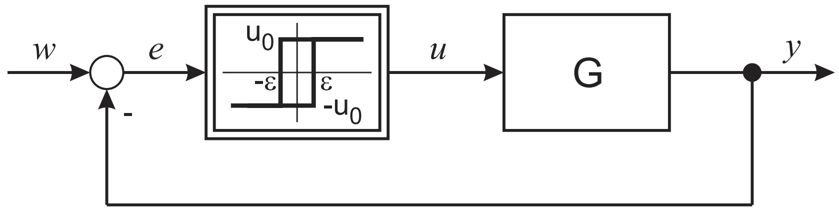

Bild 13.1: Blockschaltbild

Gegeben sei der in Bild 13.1 abgebildete nichtlineare Regelkreis. Er setze sich aus einem Zweipunktglied mit Hysterese und einem linearen Streckenteil $G(s)$ mit Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{V}{(T_1\, s + 1)(T_2\, s + 1)(T_3\, s + 1)}$$

zusammen.

a) Bestimmen Sie die Beschreibungsfunktion $N(\hat{e})$ für die nichtlineare Kennlinie.

b) Skizzieren Sie die Beschreibungsfunktion $N(\hat{e})$ und die negativ inverse Beschreibungsfunktion $-1/N(\hat{e})$.

c) Welche Aussagen lassen sich über das System bezüglich der Stabilität machen?

Lösung:

Allgemein

Zunächst wird der Regelkreis eventuell durch Verschieben einzelner Blöcke so umgezeichnet, dass die wesentliche Nichtlinearität lokalisiert ist und sich die Kreisübertragungsfunktion entsprechend Bild 13.2 in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil zerlegen lässt:

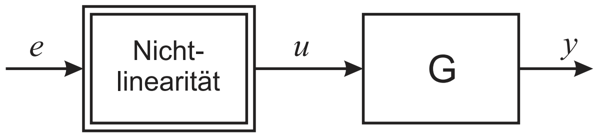

Bild 13.2: Kreisübertragungsfunktion

Das System wird mit einem harmonischen Signal angeregt:

$$e(t) = \hat{e}\sin(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{e}\ \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

Zur Überprüfung der Stabilität mittels der Beschreibungsfunktion müssen die folgenden Voraussetzungen gelten:

- Die Nichtlinearität wirkt momentan, d. h. sie ist nicht frequenzabhängig
- Die Nichtlinearität ist symmetrisch zum Ursprung. Dadurch entstehen bei harmonischer Anregung am Ausgang der Nichtlinearität nur ungeradzahlige Oberschwingungen.
- Der lineare Teil besitzt Tiefpasscharakter und unterdrückt die Oberschwingungen der Nichtlinearität.
- Die harmonische Anregung besitzt keinen Gleichanteil.

Der Ausgang der Nichtlinearität $u(t)$ lässt sich als eine Fourier-Reihe darstellen:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \hat{u}_\nu \cos\left(\nu\omega t + \alpha_\nu\right) \\ &= \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{\hat{u}_\nu\ \mathrm{e}^{j(\nu\omega t + \alpha_\nu)}\right\} \end{aligned}$$

Im Frequenzbereich gilt die Zerlegung des linearen Streckenteils $G(s)$ in Amplituden- und Phasengang zerlegen:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\ \mathrm{e}^{j\varphi_\nu}$$

Damit lässt sich das Ausgangssignal $y(t)$ sofort angeben:

$$y(t) = \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{\hat{u}_\nu\ \mathrm{e}^{j\alpha_\nu} G(j\omega)\ \mathrm{e}^{j\omega\nu t}\right\}$$

Aufgrund der Voraussetzung, dass die Strecke $G(s)$ Tiefpassverhalten aufweist, lassen sich die Oberschwingungen vernachlässigen und die Betrachtung auf die Grundschwingung reduzieren:

$$y(t) \approx \mathrm{Re}\left\{\hat{u}_1\, \mathrm{e}^{j\alpha_1} G(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

Es wird eine Funktion N eingeführt, die das Übertragungsverhalten der Nichtlinearität beschreiben soll:

$$\begin{aligned} N(j\omega t) &= \frac{u(j\omega t)}{e(j\omega t)} \\ &= \frac{\sum\limits_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \hat{u}_\nu\, \mathrm{e}^{j(\nu\omega t+\alpha_\nu)}}{\hat{e}\, \mathrm{e}^{j\omega t}} \end{aligned}$$

Beschränkt man sich nun entsprechend des Tiefpassverhaltens ausschließlich auf die Grundwelle, so folgt:

$$N(j\omega t) = \frac{\hat{u}_1\, \mathrm{e}^{j(\omega t+\alpha_1)}}{\hat{e}\, \mathrm{e}^{j\omega t}}$$

Der harmonische Anteil lässt sich kürzen und man erkennt, dass die Funktion tatsächlich nur von der Amplitude $\hat{e}$ des Eingangssignal abhängt. Diese Funktion wird als *Beschreibungsfunktion* bezeichnet:

$$N(\hat{e}) = \frac{\hat{u}_1}{\hat{e}}\, \mathrm{e}^{j\alpha_1}$$

Damit lässt sich das Ausgangssignal nun wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1\, \mathrm{e}^{j\alpha_1} &= N(\hat{e})\hat{e} \\ y(t) &= \mathrm{Re}\left\{N(\hat{e})G(j\omega)\hat{e}\; e^{j\omega t}\right\} \end{aligned}$$

Die Nichtlinearität lässt sich mit der Beschreibungsfunktion wie ein normales Übertragungselement betrachten. Für den geschlossenen Kreis kann daher die folgende Gesamtübertragungsfunktion aufgestellt werden:

$$\frac{Y}{W} = \frac{N(\hat{e})G(j\omega)}{1+N(\hat{e})G(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{\frac{1}{N(\hat{e})}+G(j\omega)}$$

Bekanntlich wird das System instabil, sobald der Nenner zu null wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(\hat{e})} + G(j\omega) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad G(j\omega) &= -\frac{1}{N(\hat{e})} \end{aligned}$$

Analog dem Nyquist-Kriterium, das Instabilität anzeigt, sobald der Punkt -1 von der Orstkurve der Kreisübertragungsfunktion umfahren wird, befindet sich das System im Schnittpunkt von Beschreibungsfunktion und Ortskurve des linearen Anteils an der Stabilitätsgrenze und wird instabil, sobald die Beschreibungsfunktion innerhalb der Ortskurve liegt, wie es im Bild 13.3 dargestellt ist.